Développement : Un développement asymptotique à trois termes pour la suite des log itérés.

But : On considère $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et $u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$ pour $n \geqslant 0$. On veut trouver un développement asymptotique à 3 termes pour (u_n). Plus précisément, on montre qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{u_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{3}\frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{C}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})}$. Le contenu du développement est la partie II de ce document. Elle ne contient pas l'ensemble des calculs mais faites-les vous-mêmes. C'est la seule façon de retenir ce développement qui, s'il n'est pas dur, demande de la pratique.

Si vous n'arrivez pas à le boucler en 15 minutes, refaites-le suffisamment pour connaître quasiment les calculs par cœur (notamment les constantes). S'il est trop court pour vous, ajoutez le lemme donné en section I (il n'est pas nécessaire au développement mais c'est un plus) voire carrément poussez-donc le développement asymptotique à 4 termes :)

I. Un lemme facultativo-décoratif, et un petit disclaimer

Pour trouver un équivalent à une suite récurrente, on peut utiliser la méthode suivante :

Lemme I.0.1.
*Soit $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]0, b]$, $0 < f(x) < x$. Alors si $u_0 \in]0, b]$, la suite récurrente (u_n) obtenue est décroissante et tend vers 0. Si de plus $f(x) = x - \lambda x^r + o(x^r)$ pour $r > 1$ et $\lambda > 0$, alors u_n équivaut à **insérez ici formule moche**.*

Preuve. f stabilise $]0, b[$. Donc par récurrence, $u_n \in]0, b[$, et ainsi $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$ ce qui montre qu'elle est décroissante bornée donc convergente. Pour le DL, cherchez $\alpha \neq 0$ tq $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge vers une limite l. Appliquez la moyenne de Cesàro pour en déduire que $u_n^\alpha \sim l{\cdot}n$, donc un équivalent de u_n. □

Remarque : *L'hypothèse "$f(x) < x$" est difficile à retirer si on veut que ça marche "pour tout u_0". Mais il existe une variante de ce lemme sans hypothèses sur f à part le DL, donnant un résultat "pour tout u_0 assez petit". Cela permet de s'intéresser aux suites récurrentes définies pour $f(x) = x + e^{-x}$ (c'est un autre développement). Ici, en supposant une inégalité sur f,[1] on peut s'assurer que ça marche pour tout u_0 dans l'intervalle de définition.*

La vérité est que ce lemme est complètement débile et n'éclaircit rien. Cette formule est indigeste et personne ne la retient par coeur. Cela ne devrait pas être un lemme mais une méthode, qui s'apprend sur des exemples.

II. Un développement asymptotique à l'ordre 3 !

On considère $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$ pour $n \geqslant 0$. Cette suite est bien définie car $\ln\big(1 + \mathbb{R}_+^*\big) \subset \mathbb{R}_+^*$. On a par stricte concavité du ln : $\forall x > 0$, $0 < \ln(1 + x) < x$, ce qui montre qu'elle est strictement décroissante et minorée, donc converge vers un point fixe de ln, donc $u_n \to 0$.

Première étape : (la méthode pour trouver un équivalent) trouver $\alpha \neq 0$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge (tips : factorisez par u_n^α et faites un DL). On trouvera $\alpha = -1$ et $u_n \sim 2/n$.

Deuxième étape : donner le développement limité au sens fort à l'ordre 3 du log. Il s'écrit $u_{n+1} = u_n - 1/2u_n^2 + 1/3u_n^3 + O(u_n^4)$. Ce terme à l'ordre 4 ne servira pas lors de l'étape suivante mais celle d'après. Il permettra d'avoir de la précision sans rallonger les calculs. Par un calcul de DL simple, on en déduit : $\boxed{u_{n+1}^{-1} - {u_n}^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12}u_n + O(u_n^2)}$.[2]

Troisième étape : Combinez les résultats des étapes 1 et 2. Vous avez donc un équivalent de $u_{n+1}^{-1} - {u_n}^{-1} - 1/2$ qui est non sommable donc on peut sommer les équivalents. En utilisant que $H_n :=$

1. et on s'en fout que f soit croissante ou pas, contrairement à ce que font certaines versions de ce dev...
2. On note qu'on pourrait d'ores et déjà pousser ce DL à un ordre arbitraire car il ne dépend pas du DL actuellement connu pour u_n. C'est pour cela qu'on fait ce DL une seule bonne fois pour toutes.

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$, on en déduit le deuxième terme du DL voulu : $u_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{3}\frac{\ln(n)}{n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)$.

Quatrième étape : Insérez cette expression de u_n dans la formule obtenue en deuxième étape. On obtiendra donc une estimation de $u_{n+1}^{-1} - {u_n}^{-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6n}$ qui aura le mauvais goût d'être sommable. Qu'à cela ne tienne : les sommes partielles de cette suite convergent vers une constante notée C.[3] Utiliser le DL du nombre harmonique $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$ pour avoir une estimation de u_n^{-1} à $o(1)$ près. Par un dernier DL, inversez cette expression, constatez que le degré de précision est $o(\frac{1}{n^2})$, et le développement est terminé.

Remarque II.0.1. Le résultat ainsi obtenu est le suivant : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{u_n = \frac{2}{n} + \frac{2}{3}\frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{C}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})}$. Vus les calculs, C est probablement à quelque chose près inversement proportionnel à $-u_0$, voir la section III. Ce DL est clairement plus fort que celui à l'ordre 2 : il précise d'une part le terme d'erreur précédent (le $o(\ln(n)/n^2)$ était en fait une quantité de l'ordre de $1/n^2$), et c'est d'autre part un résultat de convergence (si un jour il vous venait à l'idée de regarder la suite $\big(n^2 u_n - 2n - 2/3\ln(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$)).

III. Estimation de la constante C

Le calcul de C semble difficile. Dans le livre de De Brujin, *Asymptotic methods in analysis*, l'auteur étudie de façon analogue la suite des sinus itérés et se retrouve, tout comme nous, dès le troisième terme avec une constante un peu mystérieuse dont il ne donne pas de propriétés très précises.

J'offre une bière à qui pourra prouver ou infirmer que C ne dépend pas de u_0. Il faudrait pour cela écrire exactement les o et O pour savoir qui dépend de quoi.

Bonus : Calcul numérique de la constante C : avec Sage, on peut calculer numériquement C

```
f(x)=ln(x+1)
N=10000#nombre d'itérations
RR=RealField(892)#892 bits de précision
u=RR(1)#le terme de départ u_0
for i in range(0,N) :
    u=f(u)
print((N^2*u-2*N- (2/3)*ln(N)).n(digits=20))#afficher la constante C obtenue avec 20 décimales
     de précision
```

En faisait augmenter le paramètre N, on constate que le nombre renvoyé semble converger, mais que la convergence est très lente (les premières décimales bougent encore même avec un grand N).

En faisant varier u_0, on peut se convaincre que C varie à peu près en $-{u_0}^{-1}$ (ce qui est conforme à ce qu'on voit dans les calculs).

3. Pour moi, il est dur de la déterminer. On n'aurait pas pu considérer les restes de la série (car il y a aussi du non sommable dans notre expression). À l'instar de la méthode utilisée pour H_n (cf cet exo classique, par exemple sur Bibmath), il était tentant de poser $w_n = u_n - 2/n - 2/3\ln(n)/n^2$ (le terme d'erreur) et tenter d'estimer $t_n = w_{n+1} - w_n$ via un DL puis des restes de séries convergentes. Cependant, le fait que $\ln(1+x) - x$ soit en x^2 fait apparaître un terme d'erreur sommable, certes, mais son reste est en $\ln(n)/n^2$. On ne trouve alors aucune précision supplémentaire.